# Conjectures, counterexamples and A. Grothendieck

Carmen Martínez Adame

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM

May 25, 2022

# A note to start...

I have long been interested in understanding the role of counterexamples and pathological objects in mathematical understanding. The work I will present here is part of this larger project and is still very much work in progress.

CHAPMAN UNIVERSITY | Schmid College

VISIT

About | Academics | Admission | Alumni | Arts | Campus Life | Research

## More Information

Expand

**Who is Alexander Grothendieck?**

Alexander Grothendieck was born in Berlin in March 1928. He had a difficult and traumatic childhood. His mother was German and his father Russian, both of whom were politically active. They had migrated to France as refugees and Grothendieck joined them in France after a few years in 1939. His father eventually was murdered in Auschwitz. At school and later at Montpellier University, he was not happy with the textbooks and the way in which mathematics was taught. He would immerse himself for hours in a problem if it interested him. For example, during his days as a student at Montpellier University, working in complete isolation, he rediscovered measure theory and the Lebesgue integral.

1950-1960 were the golden years for mathematics. One of the two legendary sites of activity was IHES at Paris, where Grothendieck was working. (The Institute for Advanced Studies at Princeton was the other). From about 1954 to 1970, Grothendieck revolutionized algebraic geometry as part of an epic quest to prove the important Weil Conjectures of number theory. He had the idea that these could be translated into questions about geometry and settled that way. But making this idea precise required a huge amount of work. To carry this out, he started a seminar, giving talks almost every day, and enlisting the help of some of the best mathematicians in Paris.

Working nonstop for a decade, Grothendieck and his colleagues produced tens of thousands of pages of new mathematics, packed with mind-blowing concepts. In the end, using these ideas, Grothendieck succeeded in proving all the Weil Conjectures except the final, most challenging one — a close relative of the famous Riemann Hypothesis, still an open problem, and first published in Riemann's groundbreaking 1859 paper.

Allyn Jackson wrote in a 2004 biographical essay (Notices, AMS) about Grothendieck that “He had an extremely powerful, almost otherworldly ability of abstraction that allowed him to see problems in a highly general context, and he used this ability with exquisite precision”

and went on to say that

“the trend toward increased generality and abstraction, which can be seen across the whole field since the middle of the 20th century, is due in no small part to Grothendieck’s influence.”

Letter dated 14/06/83 from Grothendieck to Ronnie Brown (Bangor):

> *Your idea of writing a "frantically speculative" article on groupoids seems to me a very good one. It is the kind of thing which has traditionally been lacking in mathematics since the very beginnings, I feel, which is one big drawback in comparison to all other sciences, as far as I know. Of course, no creative mathematician can afford not to "speculate", namely to do more or less daring guesswork as an indispensable source of inspiration. The trouble is that, in obedience to a stern tradition, almost nothing of this appears in writing, and preciously little even in oral communication.*

*De L'Analyse Fonctionnelle aux Fondements de la Géométrie Algébrique*, Jean Dieudonné in The Grothendieck Festschrift Vol. I

> *... il arriva à Nancy en Octobre 1949. A ce moment-là, Delsarte, Godement, Schwartz et moi-même y avions organisé un Seminaire sur les espaces vectoriels topologiques, théorie où nous travaillions tous dans diverses directions.*
> *La théorie des espaces de Banach et de la dualité dans ces espaces, alors déjà ancienne, était bien comprise vers 1950; mais par contre celle des espaces localement convexes généraux ne faisait que debuter ; ceux qu'on connaissait le mieux était de types très particuliers ... Il convenait donc de chercher s'il existait des proprietes générales qui rendraient compte du comportement de ces espaces particuliers.*

*Schwartz et moi-même avions commencé une telle étude pour les espaces de Fréchet et leurs limites inductives ; mais nous y avions rencontré toute une série de questions auxquelles nous ne savions pas répondre. Nous avons donc proposé à Grothendieck de les étudier, et le résultat dépassa rapidement nos espérances. En moins d'un an, il avait résolu tous nos problemes.*

# La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$, 1949

Given a topological vector space $E$ we know how to define various different topologies on its dual $E'$, the weak topology and the strong topology being the two most important ones.

The study of the relation between these topologies (when $E$ is not a normed space) is still underdeveloped and our aim in this text is to carry out this study for $\mathcal{F}$ spaces and for a more general category of spaces which we call $\mathcal{LF}$ spaces that can be considered as inductive limits of $\mathcal{F}$ spaces.

# Brief cronology 1950-1951

Grothendieck published 5 mémoires in the Comptes Rendus

- TVS
- Duality
- Compacity and pathologies (in $\mathcal{LF}$ spaces)
- TVS
- Tensor products

# BIBLIOGRAPHIE D'ALEXANDER GROTHENDIECK


[1] *Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe.* C. R. Acad. Sc. Paris **230**, 605–606 (1950).

[2] *Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces* $(\mathcal{F})$. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 1561–1563 (1950).

[3] *Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces* $(\mathcal{LF})$. C. R. Acad. Sci. Paris **231**, 940–941 (1950).

[4] *Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques.* C. R. Acad. Sci. Paris **233**, 839–841 (1951).

[5] *Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion.* C. R. Acad. Sci. Paris **233**, 1556-1558 (1951).

# Pathologies

In *La dualité...* Dieudonné and Schwartz introduce the following

> 3. **Espaces ($\mathcal{F}$) et espaces ($\mathcal{LF}$).** — Un espace ($\mathcal{F}$) peut être défini comme un espace *localement convexe, métrisable et complet* [3]. La topologie d'un espace localement convexe *métrisable* peut être définie par une suite $(p_n)$ de semi-normes, suite qu'on peut toujours supposer *croissante*. Si E est un espace ($\mathcal{F}$), V un sous-espace vectoriel fermé de E, V et E/V sont des espaces ($\mathcal{F}$). Tout produit d'une famille *dénombrable* d'espaces ($\mathcal{F}$) est un espace ($\mathcal{F}$). Le *complété* d'un espace *localement convexe et métrisable* est un espace ($\mathcal{F}$).

and add the following footnote:

(3) Nous nous écartons un peu ici de la terminologie de Banach [2] et de l'école polonaise, qui appellent plus généralement « espace $(\mathcal{F})$ » un espace vectoriel topologique métrisable et complet, mais *non nécessairement localement convexe* ; ils appellent « espace $(B_0)$ » ce que nous appelons « espaces $(\mathcal{F})$ ». Les « espaces $(\mathcal{F})$ » au sens de Banach, qui ne sont pas localement convexes, présentent d'ailleurs des caractères pathologiques qui les rendent à peu près inutilisables en Analyse fonctionnelle.

une sous-*-algèbre abélienne maximale de $R^d$ (resp. $R^g$). Les théorèmes 3 et 4 sont applicables et redonnent facilement, comme cas particuliers, la discussion de [N].

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques.* Note de M. **Alexandre Grothendieck**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Énumération de divers résultats relatifs à la structure des sous-espaces ou espaces quotients de certains espaces vectoriels topologiques, aux applications linéaires d'espaces du type C(K) ou du type $L^1$, et enfin aux fonctions faiblement mesurables.

1. Quelques résultats négatifs. — *a.* Il existe un espace E du type ($\mathfrak{M}$) [*voir* (1)] et un sous-espace vectoriel fermé F tels que le quotient E/F soit isomorphe à $l^1$. Cela résout par la négative la question 4 de la fin de l'article (1). De même les questions 5, 6, 8 ont une réponse négative (la dernière question a été résolue en collaboration avec M. G. Köthe). Si l'on tient compte des résultats annoncés dans deux Notes antérieures, toutes les questions de (1) sont maintenant résolues.

# 1953-55

Doctoral dissertation:
Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires
The president of the jury was Henri Cartan and the other members were Schwartz, Dieudonné and Choquet.

1955: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires is published as a Memoir of the Amer. Mathem. Soc. (16).

# Schwartz

Report:

> *Le travail présenté ici est très long, mais ne contient aucun "délayage". Les théorèmes énoncés sont difficiles, et nécessitent beaucoup d'ingéniosité. Beaucoup d'idées originales, une technique parfaite (chaque démonstration est aussi courte que possible, et utilise exactement les méthodes adéquates), une conception très claire et très ordonnée [. . . ] Enfin, si l'auteur s'est jusqu'à présent confiné dans une branche des mathématiques, il faut dire que la moisson des résultats obtenus a justifié cette spécialisation, que M. Grothendieck a par ailleurs une solide culture, et des capacités qui lui permettront sûrement de trouver aussi dans d'autres domaines.*

# Topological vector spaces, duality and weak topologies

$E$ , $E'$

$E'_b$ $E'_s$

weak

$\sigma(E, E')$

# Produits tensoriels topologigues et espaces nucléaires

Cap. 2, n$^{o}$ 2, p. 47

> *Le th. 8 et ses corollaires 1 et 2 suggèrent la conjecture suivante : Soient E et F deux espaces localement convexes tels que l'application naturelle de $E\hat{\hat{\otimes}}F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ soit un isomorphisme topologique ; est-ce que alors E ou F est forcément nucléaire ? - Je ne connais pas de contre-exemple même dans le cas le plus général, ni de démonstration même si E et F sont des espaces de Banach. Il est possible de montrer que la réponse est affirmative si E et F sont tous deux isomorphes à des sous-espaces vectoriels topologiques du produit d'une famille d'espaces de Hilbert. Signalons qu'on peut se ramener facilement au cas où E et F sont des espaces $(\mathcal{F})$.*

# Tensor product

$X, Y, Z$

$\mathcal{B}(X, Y; Z)$

$L(\;?\;; Z)$

$V \leftarrow X \otimes Y$

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\otimes"'] & Z \\
X \otimes Y \arrow[ur, "u_\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

# Chapter 1, General theory of topological tensor products

## Proposition (1)

*1. Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, $\alpha$ (resp. $\beta$) une semi-norme sur $E$ (resp. $F$). Alors il existe sur le produit tensoriel $E \otimes F$ une semi-norme et une seule $\gamma$ ayant la propriété suivante : Pour tout espace vectoriel $G$ muni d'une semi-norme $\rho$, l'isomorphisme canonique $A \to \tilde{A}$ entre l'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ dans $G$ et l'espace des applications linéaires de $E \otimes F$ dans $G$, induit un isomorphisme entre l'espace semi-normé $B(E, F; G)$ des applications bilinéaires bornées (au sens des seminormes $\alpha$, $\beta$, $\rho$) et l'espace semi-normé $L(E \otimes F, G)$ des applications linéaires bornées (pour les semi-normes $\gamma$, $\rho$).*

# Chapter 1, General theory of topological tensor products

## Definition (1)

*La semi-norme $\gamma$ définie dans la prop. 1 est appelée produit tensoriel des semi-normes $\alpha$ et $\beta$. Si $E$ et $F$ sont deux espaces normés, leur produit tensoriel $E \otimes F$ muni de la norme produit tensoriel des normes de $E$ et de $F$ est appelé produit tensoriel normé de $E$ et de $F$, son complété est appelé produit tensoriel normé complété (ou simplement produit tensoriel complété) des espaces normés $E$ et $F$, et noté $E\hat{\otimes}F$. Sa norme est notée $u \to ||u||_1$.*

# Chapter 1, General theory of topological tensor products

## Proposition (2)

*Soient $E$ et $F$ deux espaces localement convexes.*
*1. Il existe sur $E \otimes F$ une topologie localement convexe $T$ et une seule ayant la propriété suivante : Quel que soit l'espace localement convexe $G$, l'isomorphisme canonique entre l'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ dans $G$ et l'espace des applications linéaires de $E \otimes F$ dans $G$ induit un isomorphisme entre l'espace $B(E, F; G)$ des applications bilinéaires continues et l'espace $L(E \otimes F, G)$ des applications linéaires continues.*
*En particulier, le dual de $E \otimes F$ pour $T$ s'identifie à l'espace $B(E, F)$ des formes bilinéaires continues sur $E \times F$.*

# Chapter 1, General theory of topological tensor products

## Definition (2)

*La topologie $\mathcal{T}$ sur $E \otimes F$ définie dans la prop. 2 est appelé produit tensoriel projectif des topologies localemente convexes données sur $E$ et $F$, et muni de cette topologie, $E \otimes F$ prend le nom de produit tensoriel topologique projectif de $E$ et $F$ (ou simplement produit tensoriel topologique si aucune confusion n'est à craindre). Son complété est appelé produit tensoriel topologique (projectif) complété de $E$ et $F$, et noté $E\hat{\otimes}F$.*

# Chapter 1, General theory of topological tensor products

Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, alors $E \otimes F$ et $E' \otimes F'$ sont en dualité séparée (lemme 1), ce qui permet de considérer $E \otimes F$ comme un espace de formes bilinéaires sur $E' \times F'$. Il est immédiat que $E \otimes F$ s'identifie exactement à l'espace des formes bilinéaires <u>conti-nues</u> sur $E'_s \times F'_s$,

# Chapter 1, General theory of topological tensor products

**Definition (5)**

*Soient $E, F$ deux espaces localement convexes. On désigne par $E\hat{\hat{\otimes}}F$ l'espace complété de $E \otimes F$ par la topologie induite par $\mathscr{B}_e(E'_s, F'_s)$. Si $E$ et $F$ sont des espaces de Banach, $E\hat{\hat{\otimes}}F$ sera muni de la norme induite para $B(E', F')$ (notée $||u||$ suivant l'usage).*

# $\mathscr{B}_e(E'_s, F'_s)$

p. 89

$$E \hat{\hat{\otimes}} F \sim V \subseteq \mathscr{B}_e(E'_s, F'_s)$$

# Chapter 2, Theory of nuclear spaces

## Definition (4)

*Un espace localement convexe séparé est dit nucléaire, si quel que soit l'espace localement convexe séparé $F$, l'application linéaire naturelle de $E \otimes F$ dans $\mathscr{B}_e(E'_s, F'_s)$ est un isomorphisme topologique du premier espace dans le second.*

# Produits tensoriels topologigues et espaces nucléaires

Cap. 2, nº 2, p. 47

*Le th. 8 et ses corollaires 1 et 2 suggèrent la conjecture suivante : Soient E et F deux espaces localement convexes tels que l'application naturelle de $E\hat{\hat{\otimes}}F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ soit un isomorphisme topologique ; est-ce que alors E ou F est forcément nucléaire ? - Je ne connais pas de contre-exemple même dans le cas le plus général, ni de démostration même si E et F sont des espaces de Banach. Il est possible de montrer que la réponse est affirmative si E et F sont tous deux isomorphes à des sous-espaces vectoriels topologiques du produit d'une famille d'espaces de Hilbert. Signalons qu'on peut se ramener facilement au cas où E et F sont des espaces ($\mathcal{F}$).*

# Counterexamples to a conjecture of Grothendieck

by

GILLES PISIER

*Université Paris VI, Paris, France*

In his thesis ([7] II. p. 136) and in his fundamental paper ([6] p. 74), Grothendieck formulated the following conjecture: If two Banach spaces $X$ and $Y$ are such that their injective and projective tensor products $X\check{\otimes}Y$ and $X\hat{\otimes}Y$ coïncide, then either $X$ or $Y$ must be finite dimensional. The aim of this paper is to give a counterexample.

# Counterexample to a Conjecture of Grothendieck

Kamil John

Mathematical Institute of Czechoslovak Academy of Sciences, Žitná 25, CS-115 67 Praha 1, Czechoslovakia

## 1. Introduction

Grothendieck [2, Chap. II, p. 47] conjectured a positive answer to the following question:

**(G)** *Let $X$, $Y$ be locally convex linear spaces such that the extremal tensor product topologies $\pi$ and $\varepsilon$ coincide on $X \otimes Y$. Must then $X$ or $Y$ necessarily be a nuclear space?*

Recently Pisier found an example giving a negative answer to the question (*G*)

# John

John shows that there exist two hilbertisable non nuclear Fréchet spaces $X$ and $Y$, with bases such that $X \otimes_\pi Y = X \otimes_\varepsilon Y$.

# Pisier

Pisier shows an infinite dimensional separable Banach space $X$ such that $X\hat{\otimes}X = X\check{\otimes}X$, both algebraically and topologically.
He states that

> *In the last ten years, under the impulse of [Lindenstrauss & Pelczynski], several significance steps were taken towards the solution of Grothendieck's conjecture...*

# Lindenstrauss & Pelczynski

The main purpose of the present paper is to give a new presentation as well as new applications of the results contained in Grothendieck's paper [17]. In this remarkable paper Grothendieck outlined the theory of tensor products of Banach spaces. The climax of this paper was a theorem called by Grothendieck "the fundamental theorem of the metric theory of tensor products". This theorem is equivalent to the following assertion:

Let $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ be a finite matrix of real numbers such that

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} t_i s_j\right| \leqslant 1$$

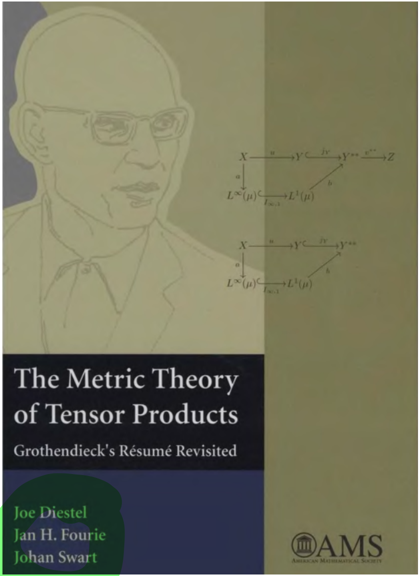
whenever $|t_i| \leqslant 1$, $|s_j| \leqslant 1$. Then for every set of unit vectors $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ and $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ in a Hilbert space

$$\left|\sum_{i,j} a_{i,j} (x_i, y_j)\right| \leqslant K,$$

where $K$ is an absolute constant and $(\cdot,\cdot)$ denotes the inner product in the Hilbert space.

This inequality, as well as many of its applications, are meaningful and interesting also outside the framework of tensor product theory. Though the theory of tensor products constructed in Grothendieck's paper has its intrisic beauty we feel that the results of Grothendieck and their corollaries can be more clearly presented without the use of tensor products. The paper of Grothendieck is quite hard to read ([1]) and its results are not generally known even to experts in Banach space theory. In fact, by using these results some problems which were posed by various authors in the last decade can be easily solved. All these considerations persuaded us to write this paper in its present form. We do not use here the notion of tensor products.

# A few final comments




## Preface

It's been more than half a century since Alexander Grothendieck burst onto the mathematical scene. His natural gift for apt abstract generalisations was first tested in the arena of functional analysis and was not found wanting. His inborn compass led him to isolate notions that were to play a central role in the study and the development of Banach space theory to this very day.

When in the late sixties, Joram Lindenstrauss and Aleksander Pełczynski redressed his Fundamental Inequality in the trappings of operator ideals, it signaled the rebirth of Banach space theory. The ideas of the Résumé were demystified and made palatable to a generation of mathematical analysts. Banach space theory soon attracted a slew of talented young mathematicians

What they said in the late sixties still applies! However, we think the Résumé still has much to offer and we believe that its contents are still worthy of close study; it is to support such a view that we devote this work.

2008


¡Gracias!
Thank you!